b- $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f_1(x)-f_1(-1)}{x-(-1)} = +\infty \Rightarrow C_1$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées positives au point de coordonnées $(-1;0)$.

c- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(1+x)e^{-2x}]^{\frac{1}{2}}$

$= \lim\limits_{X\to-\infty} \left[e^X - \frac{1}{2}Xe^X\right]^{\frac{1}{2}} = 0$ avec $X = -2x$

d- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C_1 au voisinage de $+\infty$.

2) • la fonction $(x \mapsto 1+x)$ est dérivable et strictement positive sur $]-1;+\infty[$

$\Rightarrow$ la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{1+x}\right)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$

par suite f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

• $\forall x > -1; f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}e^{-x} - \sqrt{1+x}\,e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+x}}[-1-2x]$

donc signe$[f_1'(x)]$ = signe$(-1-2x); \forall x > -1$

d'où le tableau de variation de f_1 :

x	-1		$-1/2$		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	‖ 0	↗	a	↘	0

avec $a = \sqrt{\frac{e}{2}}$

3) Désignons par T la tangente à C_1 au point d'abscisse 0

$\overset{th}{\Rightarrow}$ T : $y = f_1'(0)(x-0) + f_1(0) \Leftrightarrow$ T : $y = -\frac{1}{2}x + 1$

4) $f_1(x) = x \Leftrightarrow f_1(x) - x = 0 \Leftrightarrow h_1(x) = 0$ avec $h_1(x) = f_1(x) - x$.

h_1 est dérivable sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$ et $h_1'(x) = f_1'(x) - 1 < 0$ car $f_1'(x) \le 0$

D'où h_1 est continue et strictement décroissante sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$

alors h_1 réalise une bijection de $[-\frac{1}{2},+\infty[$ sur $h_1\left[[-\frac{1}{2},+\infty[\right]$

Or $h_1\left[[-\frac{1}{2},+\infty[\right] = \left]-\infty;\sqrt{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2}\right]$ contient 0 donc 0 possède un seul antécédent α par h_1 ce qui permet de dire que l'équation $h_1(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[-\frac{1}{2},+\infty[$.

⊡ $h_1(1) = \sqrt{2}e^{-1} - 1 = -0,47974$.

$h_1(1) < 0 = h_1(\alpha) < h_1\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 1$ **car** h_1 est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$

5) $f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}} = 1,1658$